

# ALGEBRAICKÉ STRUKTURY V GENETICE JAKO PROSTŘEDEK K ROZVÍJENÍ INTERDISCIPLINÁRNÍCH VZTAHŮ V DVOUPŘEDMĚTOVÉM UČITELSKÉM STUDIU

Petr Emanovský, Tomáš Kania

*Katedra matematiky PdF UP Olomouc*

## **Souhrn**

Článek se zabývá problematikou mezipředmětových vztahů mezi matematikou a přírodopisem v rámci dvou předmětového učitelského studia. Jsou zde popsány algebraické struktury charakterizující mechanismus dědičnosti, které jsou užitečné při řešení některých problémů genetiky.

## **Klíčová slova**

Vysokoškolská příprava učitelů, mezipředmětové vztahy, algebraická struktura, dědičnost.

## ALGEBRAIC STRUCTURES IN GENETICS AS MEANS OF DEVELOPING OF THE INTEROBJECTIVE RELATIONS IN THE UNIVERSITY EDUCATION OF TEACHERS

## **Summary**

In the paper the attention is paid to the interobjective relations between mathematics and biology in the university education of teachers. There are descriptions of algebraic structures that characterize mechanism of inheritability and those are useful for solving problems in genetics.

## **Keywords**

University education of teachers, interobjective relations, algebraic structure, inheritability.

## **1. Úvod**

Trvalým problémem dlouhodobého rozvoje školství, který vystupuje v současné době „informační revoluce“ stále výrazněji do popředí, je nezbytnost integrace lidského vědění, jejímž základním předpokladem je promyšlená integrace vzdělávacích obsahů didaktických systémů vyučovacích předmětů na všech stupních a typech škol. Jednou z možností této integrace ve školské praxi je uplatnění tzv. koordinované výuky spočívající v prohloubení mezipředmětových vztahů a vzájemného doplňování učiva jednotlivých učebních předmětů. Pro budoucího učitele matematiky je jistě velmi přínosné, pokud si některé interdisciplinární vazby uvědomí již během své vysokoškolské

přípravy, zejména pokud se jedná o souvislosti mezi jeho aprobačními předměty. Specifikum vysokoškolské výuky navíc umožňuje uplatňování tzv. kombinované výuky, kdy některá témata mohou být například v rámci volitelného semináře koncipována jako sjednocená.

V tomto článku se zaměříme na některé možnosti rozvíjení mezipředmětových vztahů mezi dvěma předměty, které se spolu běžně kombinují v rámci tradičního dvoupředmětového učitelského studia na pedagogických fakultách, totiž mezi matematikou a přírodopisem. Konkrétně ukážeme využití znalostí o algebraických strukturách při řešení některých problémů genetiky.

## 2. Algebraické struktury v genetice

Při řešení některých problémů obecné genetiky lze využít poznatků o základních algebraických strukturách, zejména o grupách a svazech. Podstatné přitom je, že tyto metody jsou efektivnější než klasické řešení pomocí tzv. mendelovských čtverců. Ukažme si několik jednoduchých příkladů, jejichž řešení vyžaduje pouze základní znalosti z algebry a genetiky. V případě potřeby doporučíme nahlédnout do uvedené literatury.

Příklad 1 Uvažujme samosprašnou rostlinu, která tvoří čtyři druhy (tvary) lusků: konkávní (označ.  $\cap$ ), konvexní (označ.  $\cup$ ), lineární (označ.  $-$ ) a silně zkrácené (označ.  $K$ ). Pokud budeme mezi sebou křížit rostliny s konkávním a konvexním tvarem lusku, všichni potomci budou mít lusky silně zkrácené. V případě, že budeme křížit rostliny s lineárními lusky, bude mít potomstvo opět silně zkrácené lusky. Při křížení rostlin se silně zkrácenými lusky s rostlinami s konkávními, konvexními a lineárními lusky dostaneme potomstvo s lusky po řadě konkávními, konvexními a lineárními. Jestliže budeme postupně křížit rostliny typu  $\cap$  s rostlinami typu  $-$  a  $\cup$ , dostaneme rostliny typu  $\cup$  a  $K$ . Konečně, křížením rostlin s konvexním a lineárním tvarem lusků dostaneme rostliny s konkávním tvarem lusků.

Tuto situaci lze snadno převést do jazyka algebraických struktur. Jedná se vlastně

o binární operaci „křížení“ (označme ji  $\otimes$ ) definovanou na čtyřprvkové množině  $M = \{K, \cap, -, \cup\}$  následující tabulkou:

Tabulka č. 1

Operace křížení samosprašné rostliny

| $\otimes$ | $K$    | $\cap$ | $-$    | $\cup$ |
|-----------|--------|--------|--------|--------|
| $K$       | $K$    | $\cap$ | $-$    | $\cup$ |
| $\cap$    | $\cap$ | $-$    | $\cup$ | $K$    |
| $-$       | $-$    | $\cup$ | $K$    | $\cap$ |
| $\cup$    | $\cup$ | $K$    | $\cap$ | $-$    |

Algebraická struktura  $(M, \otimes)$  má vlastnosti komutativní grupy. Pokud dokážeme určit podgrupy této grupy a víme něco o cyklických grupách, můžeme velmi snadno řešit následující problémy:

a) Na pustý ostrov byla vyvezena rostlina s konvexním tvarem lasku. Je možné očekávat v dalších generacích potomky s jiným tvarem lasku ?

Řešení: Klasicky bychom řešili tento problém rozbohem všech možných kombinací genů pomocí tzv. mendelovských čtverců (viz např. (6)). S využitím vlastností naší čtyřprvkové grupy však stačí, abychom si uvědomili, že prvek  $\cap$  generuje celou cyklickou grupu  $(M, \otimes)$ . V dalších generacích potomků vyvezené rostliny se tedy objeví všechny čtyři tvary lasků.

b) Na pustý ostrov byla vyvezena rostlina s lineárním tvarem lasku. Je možné očekávat v dalších generacích potomky s jiným tvarem lasku ?

Řešení: Vzhledem k tomu, že prvek  $-$  generuje pouze dvouprvkovou podgrupu  $(\{K, -\}, \otimes)$ , mohou se v dalších generacích potomků vyvezené rostliny objevit pouze silně zkrácené a lineární tvary lasků.

c) Na pustý ostrov byla vyvezena rostlina se silně zkráceným tvarem lasku. Je možné očekávat v dalších generacích potomky s jiným tvarem lasku ?

Řešení: Jelikož prvek  $K$  generuje pouze triviální jednoprvkovou podgrupu  $(\{K\}, \otimes)$ , nemohou se v dalších generacích potomků vyvezené rostliny objevit žádné jiné tvary lasků než silně zkrácené.

Příklad 2 Kulatý tvar plodů rajčat je dominantní nad podlouhlým tvarem, červená barva plodů je dominantní nad žlutou a normální vzrůst rostliny je dominantní vůči zakrslosti. Je možné získat v  $F_1$  ( $F_1$  je označení první filiální generace, čili první generace potomků) generaci rostliny normálního vzrůstu plodící kulatá červená rajčata, máme-li možnost křížit mezi sebou normálně vysoké rostliny se žlutými kulatými a žlutými podlouhlými plody a zakrslé rostliny se žlutými kulatými plody?

Řešení: Označme si nejdříve genotypy jednotlivých rostlin, které budeme křížit. Jestliže označíme například gen pro barvu písmenem A, pro tvar B, a vzrůst C, pak aabbCC je genotyp pro rostlinu normálního vzrůstu se žlutými podlouhlými rajčaty, aaBBcc je genotyp zakrslé rostliny plodící žlutá kulatá rajčata, konečně aaBBCC je genotyp normálně vysoké rostliny s kulatými žlutými plody. Pro trihybrida pak máme tyto homozygoty (ve všech znacích):

AABBBCC ...1;  
 AAbbCC ...2;  
 AABBBcc ...3;  
 AAbbcc ...4;  
 aaBBCC ...5;  
 aabbCC ...6;  
 aaBBcc ...7;  
 aabbcc 8;

Křížením těchto homozygotů dostáváme komutativní idempotentní monoid  $(M, \otimes)$ , neboli spojový polosvaz  $(M, \leq)$  s nejmenším prvkem 8. Operace křížení má potom význam svazové operace spojení.

Tabulka pro  $(M, \otimes)$ :

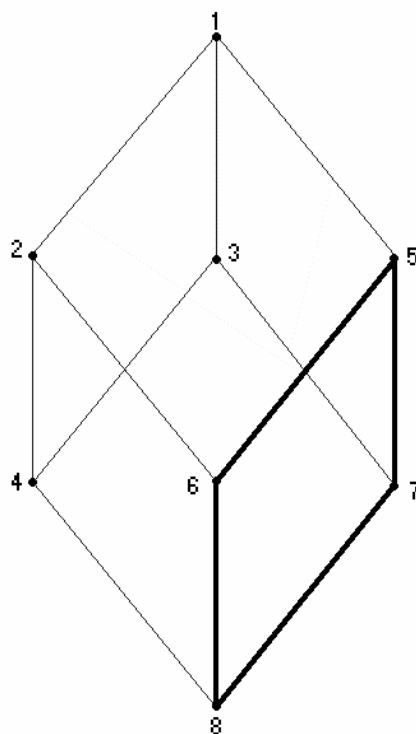
Tabulka č. 2

Operace křížení rajčat

| $\otimes$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1         | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2         | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3         | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| 4         | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5         | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6         | 1 | 2 | 1 | 2 | 5 | 6 | 5 | 6 |
| 7         | 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 7 | 7 |
| 8         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Hasseův diagram spojového polosvazu  $(M, \leq)$  s vyznačeným podpolosvazem  $N$  generovaným prvky 5, 6, 7 vypadá takto:

Obr. 1  
Hasseův diagram



Genotypy aabbCC, aaBBcc, aaBBCC představují vlastně prvky 6, 7, 5 spojového polosvazu  $(M, \leq)$  a jsou to zároveň prvky podstruktury  $N$ , která neobsahuje prvek 1, což je vlastně genotyp pro rostlinu normálního vzrůstu s kulatými červenými rajčaty. Vybereme-li tedy jakékoli dva různé prvky z prvků 5, 6, 7, tak jejich spojením nikdy nezískáme prvek 1. Odpověď: není tedy možné v  $F_1$  takovou rostlinu získat.

### 3. Hyperstruktury v genetice

Příklad 3 Významným příkladem je dědičnost krevních skupin člověka (systém A, B, AB, 0). Za vznik krevních skupin odpovídá jeden gen, který se vyskytuje ve třech formách, které jsou značeny následujícím způsobem:  $I^A$ ,  $I^B$ ,  $i^H$ . Jedná se o geny velkého účinku.

Vztahy mezi alelami:

$I^A = I^B$  ... jsou rovnocenné, působí plně v této sestavě, jejich projevem je krevní skupina AB.

$I^A \triangleright i^H$ ,  $I^B \triangleright i^H$  ... alely  $I^A$ ,  $I^B$  jsou dominantní nad  $i^H$ , nositelé alel  $I^A i^H$  (resp.  $I^B i^H$ ) pak mají krevní skupinu A (resp. B).

$i^H i^H$  ... projeví se alela  $i^H$  krevní skupinou 0.

$I^A I^A$ ,  $I^B I^B$  ... tyto zbylé kombinace alel budou pak fenotypově krevní skupiny A a B.

Označme jednotlivé genotypové třídy následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} I^A I^A &= A_1 - \text{krevní skupina A,} \\ I^{A:H} &= A_2 - \text{krevní skupina A,} \\ I^B I^B &= B_1 - \text{krevní skupina B,} \\ I^{B:H} &= B_2 - \text{krevní skupina B,} \\ I^A I^B &= AB - \text{krevní skupina AB,} \\ i^H i^H &= 0 - \text{krevní skupina 0.} \end{aligned}$$

Křížení  $\otimes$  na množině  $H = \{A_1, A_2, B_1, B_2, AB, 0\}$  nedává v tomto případě jednoznačné výsledky, nejedná se tedy o binární operaci na  $H$ , nýbrž o tzv. hyperoperaci (výsledky jsou podmnožiny množiny  $H$ ). Více poznatků o hyperstrukturách lze získat např. v monografii (3).  $(H, \otimes)$  tvoří tzv. komutativní hypergrupoid, jehož tabulka vypadá takto:

Tabulka č. 3

Hyperoperace křížení krevních skupin

| $\otimes$            | <b>A<sub>1</sub></b> | <b>B<sub>1</sub></b> | <b>0</b>       | <b>AB</b>       | <b>A<sub>2</sub></b> | <b>B<sub>2</sub></b> |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|-----------------|----------------------|----------------------|
| <b>A<sub>1</sub></b> | A <sub>1</sub>       | AB                   | A <sub>2</sub> | G <sub>1</sub>  | G <sub>2</sub>       | G <sub>3</sub>       |
| <b>B<sub>1</sub></b> | AB                   | B <sub>1</sub>       | B <sub>2</sub> | G <sub>4</sub>  | G <sub>5</sub>       | G <sub>6</sub>       |
| <b>0</b>             | A <sub>2</sub>       | B <sub>2</sub>       | 0              | G <sub>7</sub>  | G <sub>8</sub>       | G <sub>9</sub>       |
| <b>AB</b>            | G <sub>1</sub>       | G <sub>4</sub>       | G <sub>7</sub> | G <sub>10</sub> | G <sub>11</sub>      | G <sub>12</sub>      |
| <b>A<sub>2</sub></b> | G <sub>2</sub>       | G <sub>5</sub>       | G <sub>8</sub> | G <sub>11</sub> | G <sub>13</sub>      | G <sub>14</sub>      |
| <b>B<sub>2</sub></b> | G <sub>3</sub>       | G <sub>6</sub>       | G <sub>9</sub> | G <sub>12</sub> | G <sub>14</sub>      | G <sub>15</sub>      |

$$\begin{aligned} G_1 &= \{A_1, AB\}, G_2 = \{A_1, A_2\}, G_3 = \{AB, A_2\}, G_4 = \{AB, B_1\}, G_5 = \{AB, B_2\}, G_6 = \{B_1, B_2\}, \\ G_7 &= \{A_2, B_2\}, G_8 = \{A_2, 0\}, G_9 = \{B_2, 0\}, G_{10} = \{A_1, B_1, AB\}, G_{11} = \{A_1, A_2, AB\}, \\ G_{12} &= \{B_1, B_2, AB\}, G_{13} = \{A_1, A_2, 0\}, G_{14} = \{AB, A_2, B_2, 0\}, G_{15} = \{B_1, B_2, 0\}. \end{aligned}$$

V porodnici zaměnili dva chlapce. Rodiče jednoho z nich měli krevní skupiny A a 0, rodiče druhého A a AB. Jeden z chlapců měl krevní skupinu 0 a druhý A. Přiřaďte chlapce rodičům.

Řešení: Uvažujme nejdříve například rodiče s krevními skupinami A, AB a provedme hyperoperace:

$$\begin{aligned} A_1 \otimes AB &= \{A_1, AB\}, \\ A_2 \otimes AB &= \{A_1, A_2, AB\}. \end{aligned}$$

Rodiče s krevními skupinami A, AB tedy nemohou mít dítě s krevní skupinou 0, jejich syn je pak dítě s krevní skupinou A. Mohli bychom provést další hyperoperace mezi prvky představujícími krevní skupiny druhých rodičů a zjistili bychom, že jejich syn opravdu krevní skupinu 0 mít může, řešení je už ovšem zřejmé.

#### 4. Závěr

Uvedené příklady jsou jen malou ukázkou typických genetických problémů, které lze výhodně řešit s využitím poznatků o algebraických strukturách a hyperstrukturách. Řadu dalších příkladů lze nalézt v práci (4). Podstatné přitom je, že popsaná metoda je efektivnější než metoda klasická a navíc určitou algebraickou strukturu lze zpravidla užít na řešení celé třídy problémů obecné genetiky. V tomto smyslu je tedy tato metoda univerzálnější.

#### Literatura:

1. EMANOVSKÝ, P. *Algebraické struktury ve vysokoškolské přípravě učitelů matematiky*. Olomouc : VUP, 2000.
2. HÁJEK, J. Integroující tendence ve vyučování matematice a přírodovědných předmětů. In *Sborník prací PdF MU Matematika a didaktika matematiky*, Brno, 1993, s. 59-65.
3. CHVALINA, J. *Funkcionální grafy, kvaziuspořádané množiny a komutativní hypergrupy*. Brno : VMU, 1995.
4. KANIA, T. *Algebraické struktury a hyperstruktury v genetice*, Práce SVOČ, Olomouc, 2004.
5. KUBÍČEK, Z., KROPÁČ, J. Využití mezipředmětových vztahů při metodickém zpracování obsahu učiva. In *Acta Universitatis Olomucensis Facultas Paedagogica Mathematica III*, Olomouc : VUP, 1994, s. 89-91.
6. NEČÁSEK, J. a kol. *Obecná genetika*. Praha : SPN, 1979.

#### Kontaktní adresy :

Doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.

Katedra matematiky

Pedagogická fakulta UP

Žižkovo nám. 5

7714 00 Olomouc

**telefon :** 58563 5704, **e-mail :** eman@pdfnw.upol.cz

Tomáš Kania

Frýdland n. O.

739 11 Kamenec 1123

**telefon:** 605 756 134, **e-mail :** T.Kania@seznam.cz