

MĚŘENÍ MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI V RÁMCI MEZINÁRODNÍHO VÝZKUMU OECD PISA V ROCE 2003

Anna Šlégrová

Anotace

První část příspěvku informuje o výzkumu PISA. Zaměřuje se především na rok 2003, ve kterém se ve větší míře zkoumala matematická gramotnost. Popisuje jednotlivé složky matematické gramotnosti a jejich vzájemnou provázanost. Druhá část obsahuje ukázkou úloh, které byly ve výzkumu použity, a jejich analýzu z hlediska jednotlivých kompetencí.

Klíčová slova

Výzkum PISA, matematická gramotnost, matematické kompetence, matematizace, typy úloh.

Abstract

Assessing mathematical literacy within the OECD/PISA research in 2003

This paper comprises two parts. In the first one, the PISA research is introduced. The main period of focus is 2003, when mathematical literacy was investigated in greater detail. Individual components of mathematical literacy are described and their mutual interrelatedness is outlined. The second part provides a sample of problems that served as stimuli in the research. Their analysis with respect to individual mathematical skills is demonstrated.

Key words

The PISA research, mathematical literacy, mathematical skills, mathematization, types of mathematical problems.

1 Úvod

Výzkum PISA (Programme for International Student Assessment) je zaměřen na zjišťování gramotnosti patnáctiletých žáků ve všech typech škol zemí OECD. Výzkumu se mohou účastnit také země, které nejsou členy OECD. PISA pokrývá tři oblasti gramotnosti: čtenářskou, matematickou a přírodovědnou. Cílem tohoto mezinárodního výzkumu je vyvinout ukazatele, které by naznačily, do jaké míry připravily vzdělávací systémy zúčastněných zemí patnáctileté žáky pro praktický život. Výzkum nehodnotí pouze nabyté teoretické vědomosti, ale především zjišťuje, jak žáci své znalosti umí používat v každodenních situacích. Nedílnou součástí je zkoumání mezipředmětových dovedností.

Výzkum PISA probíhá ve třech fázích vždy jednou za tři roky s tím, že každému hlavnímu šetření předchází pilotáž, která má ověřit nové položky určené pro hlavní šetření a také má za úkol zjistit, zda zadané otázky jednotlivých úloh jsou dostatečně srozumitelné. V každé z hlavních fází se důkladněji zkoumá vždy jedna ze tří testovaných oblastí. První fáze proběhla v roce 2000 a zaměřovala se na čtenářskou gramotnost, druhá fáze v roce 2003 se podrobněji zabývala matematickou gramotností a třetí fáze, která probíhá v letošním roce 2006, se zaměřuje na gramotnost přírodovědnou.

Samotný průběh šetření spočívá v tom, že každý žák dostane test, jehož vyplnění trvá dvě hodiny. Dále žáci vyplňují dotazník, ve kterém poskytují informace o sobě, o prostředí, ve němž žijí, odpovídají na otázky zaměřené na jejich školu, kterou navštěvují, a na vyučovací metody, se nimiž se běžně setkávají. Do výzkumného šetření nejsou zahrnuti pouze žáci školy, ale také ředitel, kterému je určen dotazník týkající se dané školy (základní informace o škole a jejím prostředí, o pedagogickém sboru, o výchovných a vzdělávacích postupech, o řízení školy atd.). V letošním roce by měly být poprvé zadávány také rodičovské dotazníky.

2 Matematická gramotnost

V roce 2003 proběhla druhá fáze výzkumu, která kladla větší důraz na zjišťování úrovně matematické gramotnosti. Tato fáze byla zahájena v roce 2001 přípravou nástrojů pro sběr dat, které byly v roce 2002 ověřeny v rámci pilotního šetření. Hlavní sběr dat proběhl v květnu 2003. Celkem se do druhé fáze zapojilo 41 zemí z celého světa, z nichž třicet je členy OECD, viz Tab. 1. Testování se zúčastnilo více než čtvrt milionu žáků. V České republice se do výzkumu zapojilo celkem 260 škol (základních, speciálních, gymnázií, středních odborných škol a středních odborných učilišť) a 9919 žáků.

Matematická gramotnost je ve výzkumu OECD/PISA definována jako „schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana“.¹ O matematické gramotnosti hovoříme proto, aby se zdůraznilo funkční používání matematických znalostí v mnoha rozmanitých situacích a kontextech vyžadujících úsudek a vhled. K tomu je ovšem potřeba nemalý objem základních matematických znalostí a dovedností a také dovednost v každodenních situacích objevit matematický problém, tzv. danou situaci matematizovat, vyřešit ji a získaný výsledek opět převést do kontextu zadané úlohy a nakonec zvážit, zda je řešení reálné či nikoli. Lze tedy konstatovat, že matematická gramotnost představuje tvořivé kombinování jednotlivých výše zmíněných komponentů. Rozlišují se tři složky matematické gramotnosti, jejichž vzájemnou provázanost dokresluje Obr. 1. Jedná se o tyto složky: *situace a kontexty*, do kterých jsou zadané problémy zasazeny; *matematický obsah*, jenž by měl být použit při řešení zadaných úkolů, většinou bývá uspořádán do tematických okruhů; *kompetence*, které se uplatňují při řešení jednotlivých problémů v okamžiku spojení reálné situace a matematiky. „Zatímco situace a kontexty vymezují oblasti problémů reálného světa a tematické okruhy vyjadřují způsob nahlížení na svět ‚matematickými brýlemi‘, kompetence jsou samotným jádrem matematické gramotnosti.“² Výzkum PISA vychází z osmi charakteristických matematických kompetencí (matematické myšlení, matematická argumentace, matematická komunikace, modelování, vymezení problémů a jejich řešení, reprezentace, užívání symbolického, formálního a technického jazyka a operací, užívání pomůcek a nástrojů). Matematické kompetence označují postupy, které žáci používají při řešení jednotlivých úkolů. Jsou zastoupeny ve třech zkoumaných třídách – třída reprodukce, integrace a reflexe. Obsah jednotlivých tříd představuje obrázek 3. Pro dokreslení uvádím příklady jednotlivých matematických kompetencí ve třídě reprodukce.

Matematické myšlení obsahuje základní otázky „Kolik?“, rozlišování mezi definicemi a tvrzeními, porozumění matematickým pojmům. **Matematická argumentace** zahrnuje standardní postupy a výpočty. **Matematická komunikace** vyjadřuje porozumění jednoduchým matematickým záležitostem a ústní i písemné vyjadřování k nim. **Modelování** obsahuje rozpoznání, vybavení a správ-

¹ *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003*. Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004, s. 5.

² *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003*. Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004, s. 12.

né využívání známých modelů, jejich převod do reality a naopak. **Vymezování problémů a jejich řešení** představuje vymezování a formulování problémů, ve kterých se jedná o reprodukci standardních otázek majících jedno řešení. **Reprezentace** obsahuje dekodování, kódování a interpretování známých a procvičených matematických postupů. **Užívání symbolického, formálního a technického jazyka a operací** v sobě zahrnuje dekodování a interpretování základního symbolického a formálního jazyka ve známých situacích, práci s jednoduchými výroky a výrazy, používání proměnných, výpočty s rutinními postupy. **Užívání pomůcek a nástrojů** obsahuje znalost a používání běžných pomůcek a nástrojů v běžně známých situacích, ve kterých byla práce s těmito pomůckami řádně procvičena.

Jednou větou můžeme úlohy z třídy reprodukce charakterizovat jako reprodukce probrané látky a provádění rutinních operací. Ve zbývajících třídách – třídě integrace a reflexe nalézáme podobné náplně, ale vzrůstající míru obtížnosti. Proto zde nebudu jednotlivé složky podrobně rozepisovat. Obecně můžeme úlohy ze třídy integrace popsat jako řešení problémů, které se objevují v neobvyklých situacích, již nejsou tzv. rutinou, ale přesto jsou víceméně známé. Dochází zde k mírnému rozšíření a propojení probírané látky. V poslední třídě, třídě reflexe, se objevují úlohy, ve kterých je potřebná žákova schopnost plánování strategie řešení a následná aplikace v problémové situaci. Je nezbytné vyspěle uvažování, rozvinutá schopnost argumentace, abstrakce a zobecňování.

Ve výzkumu v roce 2003 byly zjišťovány kompetence žáků ve čtyřech oblastech matematiky. Jednalo se o tyto tematické oblasti: *kvantitu*, která obsahovala číselné jevy a kvantitativní vztahy, *prostor a tvar*, zabývající se prostorovými a geometrickými jevy, *změnu a vztahy*, zahrnující matematické vyjádření změn, vztahy mezi proměnnými, a *neurčitost*, představující oblast pravděpodobnosti a statistiky.

3 Formáty úloh

Pro správné ohodnocení výsledků žáků je třeba mít k dispozici množství dokladů o jejich myšlení. Proto se v hodnocení řešení mezipředmětových problémových příkladů využívají nejrůznější formáty úloh.³ Vedle úloh s výběrem odpovědi z více možností jsou do hodnocení zařazovány úlohy vyžadující tvorbu

³ Termínem formát úlohy máme v tomto případě na mysli strukturu zadávaných úloh. To v sobě zahrnuje formulaci úloh, jednotlivé typy úloh z hlediska možných odpovědí, zasažení matematického problému do určitého situačního kontextu atd.

odpovědi vlastními slovy, a to jak úlohy uzavřené, tak i otevřené. Úlohy obsahují úvodní část, po které následuje vlastní otázka. Jednotlivé úlohy, jež byly obsahem výzkumu PISA v roce 2003, je možné zařadit do určitých typových situací, a to buď jako osobní, nebo vzdělávací, nebo veřejné, a nebo jako vědecké. Velký důraz je kladen na kontext samotné úlohy. Je upřednostňována autentická situace, řešení problémů s „nematematickým“ kontextem, tzn. zadání úlohy je zakomponováno do reálného prostředí. Žáci tedy řeší problém, se kterým se opravdu mohou v reálu setkat, a zároveň se musí zamyslet nad dosaženým výsledkem, zda je ve skutečnosti možný.

Formulace otázek k jednotlivým úlohám by měly být přímé a co možná nejjednodušší. Úloha, ve které se správná odpověď vybírá z několika nabízených možností, je formát vhodný především pro rychlé zjištění, zda žáci ovládají určité dovednosti a zda umí vyhledat a zpracovat určité informace. „Dobře připravené otázky mohou měřit žákovy znalosti, úroveň porozumění a také volbu či aplikaci strategií. Mohou být konstruovány tak, aby postihly více než pouze schopnost žáka vybrat jednu z možností nebo eliminovat špatné odpovědi.“⁴

Uzavřené úlohy s tvořenou odpovědí jsou vhodné k hodnocení vyšších cílů a komplexnějších postupů. Tento typ úloh je podobný úlohám s výběrem odpovědi s tím rozdílem, že úkolem žáků je samostatně vytvořit odpověď. V tomto případě by měly být úlohy zadávány co nejsrozumitelněji, aby žák pochopil, jakým směrem by měla být zaměřena jeho odpověď.

Dalším formátem úloh jsou otevřené úlohy s tvořenou odpovědí, jež umožňují zjistit, do jaké míry je žák schopen porozumět úloze a jakým způsobem dokáže prezentovat svá řešení. Vyžadují po žácích rozsáhlejší odpověď a proces tvorby odpovědi většinou obsahuje kognitivní činnosti vyššího řádu. V praxi to znamená, že úkolem žáka je nejen napsat odpověď, ale také popsat postup řešení, pomocí kterého došel k výsledku. V neposlední řadě se setkáváme se zadáním úlohy v takové podobě, kdy k jednomu problémovému textu je připojen soubor několika navazujících otázek, zpravidla se vzrůstající obtížností. Jednotlivé typy úloh jsou ve výzkumu zastoupeny přibližně ve stejném počtu.

4 Ukázky úloh

V následující části zde budou uvedeny konkrétní ukázky jednotlivých formátů úloh, jež byly použity ve výzkumu PISA v roce 2003. Zadání a nastíněná

⁴ *Koncepce řešení problémových úloh ve výzkumu PISA 2003*. Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2003, s. 28.

charakteristika příkladů je volně převzata z materiálu *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003*. Příklad 1 je ukázkou úlohy, ve které je nezbytné provést matematizaci reálné situace. Je tedy nezbytné převést reálný problém do matematického jazyka, vyřešit úlohu a výsledek opět převést zpět. Na závěr je pak nutné zhodnotit řešení, zda je opravdu uskutečnitelné.

Příklad 1: Veřejné osvětlení

Městská rada se rozhodla, že v trojúhelníkovém parčíku postaví lampu veřejného osvětlení tak, aby osvětlovala celý park. Kde by měla lampa stát?

Budeme-li chtít analyzovat tento příklad, dojdeme k tomu, že park lze znázornit jako trojúhelník a osvětlenou plochu jako kruh, v jehož středu stojí lampa. Žáci tedy mají z matematického hlediska určit střed kružnice opsané trojúhelníku. Ten leží v průsečíku os souměrnosti stran trojúhelníku. Výsledné matematické řešení pak žáci musí převést zpět do dané situace. V tomto případě znamená posoudit smysluplnost umístění lampy v parku. Kdyby totiž byl v jednom ze tří rohů parku tupý úhel, lampa by byla umístěna mimo park, a to by nevyhovovalo požadavkům této úlohy.

Příklad 2: Tulení spánek

Tuleň musí dýchat dokonce i tehdy, když spí. Martin pozoroval tuleň po dobu jedné hodiny. Na začátku jeho pozorování se tuleň potopil na dno moře a usnul. Za 8 minut vyplaval z mořského dna zvolna na hladinu a nadechl se. Za 3 minuty se vrátil zpět na mořské dno. Martin si všiml, že celý tento proces probíhal velmi pravidelně.

Po jedné hodině se tuleň nacházel:

- A na dně
- B na cestě ke hladině
- C na hladině, kde se nadechoval
- D na cestě ke dnu.

Druhý příklad je úlohou, kterou je možné zařadit ke třídě kompetencí integrace. Jedná se o úlohu s výběrem odpovědi z omezeného počtu nabízených možností.

Dalším příkladem bude ukáзка otevřené úlohy s tvořenou odpovědí.

Příklad 3: Indonésie

Indonésie je ostrovní země, která leží mezi Malajsií a Austrálií. Tab. 2 uvádí údaje o rozloze a počtu obyvatel Indonésie a jejich rozmístění na šesti nejdůležitějších ostrovech. Jedním z mnoha problémů Indonésie je nerovnoměrné rozmístění obyvatel na ostrovech. Z tabulky 2 je vidět, že na Jávě, jež zaujímá méně než 7 % celkové rozlohy, žije téměř 62 % obyvatel. Sestroj graf (nebo grafy), který zobrazí nerovnoměrné rozmístění obyvatel Indonésie.

Zde se jedná o otevřený typ úlohy s tvořenou odpovědí. Zastoupení takového druhu představuje zhruba třetinu všech úloh v matematické části výzkumu.

5 Závěr

Matematická část výzkumu PISA klade velký důraz na porozumění a užívání matematických znalostí při řešení problémů, jež vznikají v rámci každodenních zkušeností, což představuje ideál, který různé vzdělávací systémy na světě naplňují v různé míře. Obrázek 2 znázorňuje průměrný výsledek žáků jednotlivých zemí. Česká republika se umístila v měření matematické gramotnosti nad průměrem zemí OECD. Cílem výzkumu je snaha vytvořit pestrou složku matematických úloh s různým rozsahem obtížnosti, jež by měla být inspirací nejen pro učitele matematiky, ale také pro celou širokou veřejnost.

Tento příspěvek měl za cíl blíže seznámit čtenáře s jednou z hlavních zkoumaných složek výzkumu, kterou je matematická gramotnost. Snahou bylo popsat jednotlivé složky matematické gramotnosti a poukázat na stále aktuální potřebu provázanosti matematiky s každodenním praktickým využitím. Celý výzkum může být pro čtenáře, zvláště pro pedagogy, inspirací a podnětem, kdy ze zadaných příkladů ve výzkumech PISA mohou čerpat nápady a náměty pro výuku jednotlivých předmětů, v našem případě matematiky. Také nás může motivovat konečné umístění České republiky v celkovém žebříčku, které není špatné, ale mohlo by být i lepší.

Seznam literatury

- Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003.* Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004.
- Koncepce řešení problémových úloh ve výzkumu PISA 2003.* Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2003.
- Koucký, J., Kovařovic, J.: *Učení pro život. Výsledky výzkumu OECD PISA 2003.* Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004.

Úlohy pro měření čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti (patnáctiletých žáků). Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2000.

Ústav pro informace ve vzdělávání: *Informace o výzkumu PISA* (online), (cit. 27. 10. 2006). Dostupné na : <http://www.uiv.cz/clanek/260/283>.

Mgr. Anna Šlégrová
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta UP v Olomouci
Žižkovo nám. 5
771 40 Olomouc
tel.: 585 635 705
e-mail: a.slegrova@centrum.cz

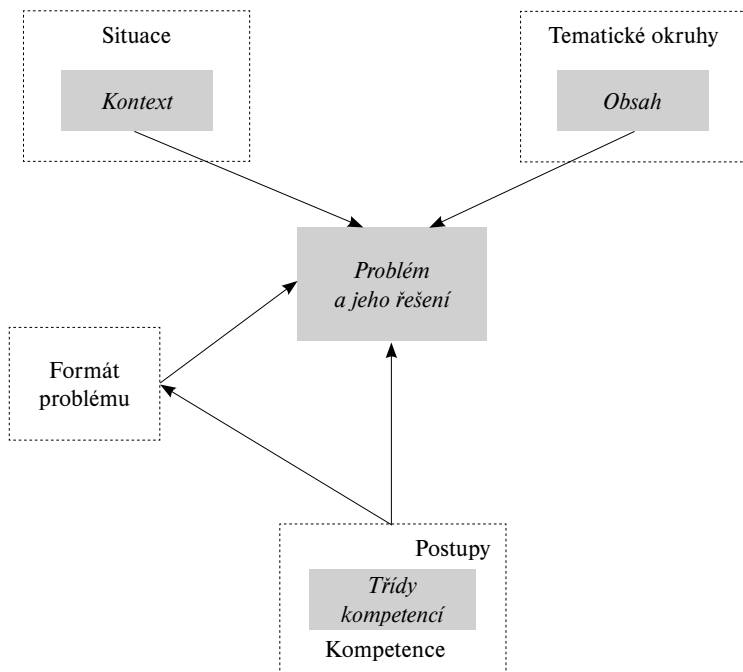
Tab. 1:
Účast na projektu PISA⁵

Členské země OECD	Účast na projektu PISA v roce			Nečlenské země	Účast na projektu PISA v roce		
	2000	2003	2006		2000	2003	2006
Austrálie	•	•	•	Albánie	•		
Belgie	•	•	•	Argentina	•		•
Česká republika	•	•	•	Ázerbájdžán			•
Dánsko	•	•	•	Brazílie	•	•	•
Finsko	•	•	•	Bulharsko	•		•
Francie	•	•	•	Estonsko			•
Irsko	•	•	•	Hongkong	•	•	•
Island	•	•	•	Chile			•
Itálie	•	•	•	Chorvatsko			•
Japonsko	•	•	•	Indonésie	•	•	•
Kanada	•	•	•	Izrael			•
Korea	•	•	•	Jordánsko			•
Lucembursko	•	•	•	Katar			•
Maďarsko	•	•	•	Kazachstán			•
Mexiko	•	•	•	Kolumbie			•
Německo	•	•	•	Kyrgyzstán			•
Nizozemsko	•	•	•	Lichtenštejnsko	•	•	•
Norsko	•	•	•	Litva			•
Nový Zéland	•	•	•	Lotyšsko	•	•	•
Polsko	•	•	•	Macao		•	•
Portugalsko	•	•	•	Makedonie	•		
Rakousko	•	•	•	Peru	•		
Řecko	•	•	•	Rumunsko	•		•
Slovensko		•	•	Rusko	•	•	•
Španělsko	•	•	•	Slovinsko			•
Švédsko	•	•	•	Srbsko a Černá Hora		•	•
Švýcarsko	•	•	•	Thajsko	•	•	•
Turecko		•	•	Tchaj-wan			•
USA	•	•	•	Tunisko		•	•
Velká Británie	•	•	•	Uruguay		•	•

⁵ Ústav pro informace ve vzdělávání: <http://www.uiv.cz/clanek/260/283>, staženo 27. 10. 2006.

Obr. 1:

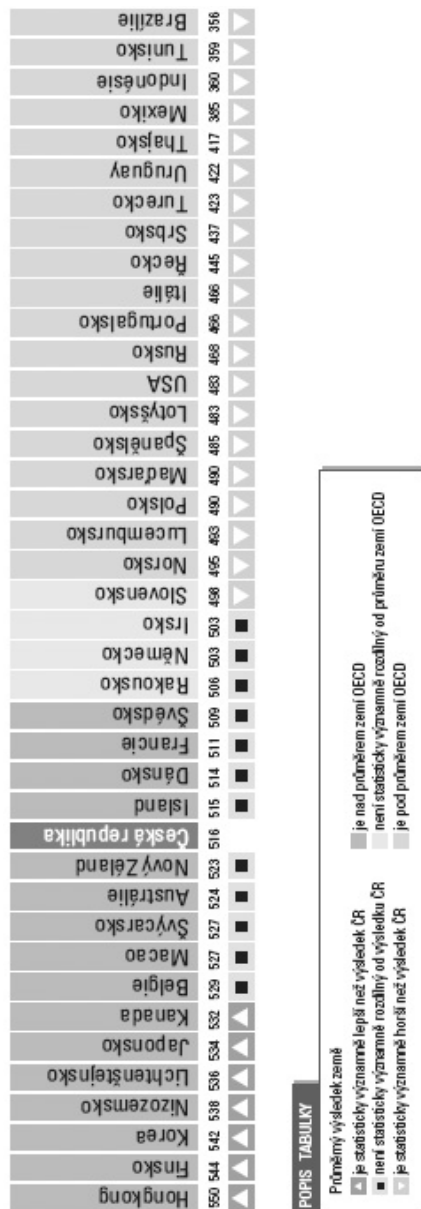
Složky matematické gramotnosti ve výzkumu OECD/PISA⁶



⁶ *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003*. Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004, s. 11.

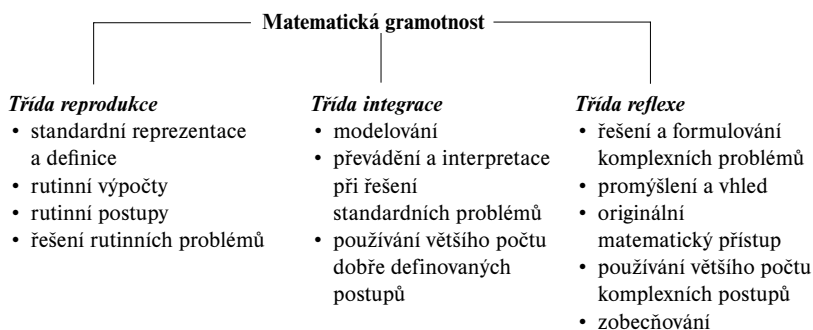
Obr. 2:

Průměrný výsledek žáků jednotlivých zemí – matematická gramotnost v roce 2003⁷



⁷ Koucký, J., Kovařovic, J.: *Učení pro život. Výsledky výzkumu OECD PISA 2003*, Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004, s. 4.

Obr. 3:
Třídy kompetenci⁸



Tab. 2:
Indonésie

Ostrov	Rozloha (km ²)	Procento z celkové rozlohy	Počet obyvatel v roce 1980 (tis.)	Procento z celkového počtu obyvatel
Jáva/Madura	132 187	6,94	91 281	61,93
Sumatra	473 606	24,85	27 981	18,99
Kalimantan (Borneo)	539 460	28,31	6 721	4,56
Sulawesi (Celebes)	189 216	9,93	10 377	7,04
Bali	5 561	0,29	2 470	1,68
Irian Jaya	421 981	22,14	1 145	0,78
Celkem	1 905 569	100,00	147 384	100,00

⁸ *Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003.* Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2004, s. 28.